道路距離と直線距離

二つの地点の直線距離と道路距離 (道路に沿ったなるべく短いルートの長さ) の比の平均を理論的に推測しなさい.

鈴木紀明 (名城大学理工学部)

[**解説**] 私は通勤に車を使っています. カーナビをセットすると, 岡崎市にある自宅から目的地の大学までの直線距離が 23.4 キロと表示され, その後に道路に沿った距離は 26.7 キロと表示されます. カーナビはなるべく短いルートを計算しているので, その値を道路距離と考えてもよいでしょう.

この時の比は

$$\frac{26.7}{23.4} = 1.141$$

です. 通勤途中には曲がり角がいくつかありますが, その割にはこの比は案外に小さいなという印象です. そこで試しに, いろいろな地点を目的地にしてカーナビをセットしてみました. その結果が下記です.

地点	大学からの道路距離	大学からの直線距離	比
大阪駅	168	143	1.175
東京駅	353	260	1.358
山口駅	631	524	1.204
金沢駅	239	163	1.466
合計	1391	1091	1.275

最下段に書いたように, これらの平均を合計の比と考えれば, その値は 1.275 です.

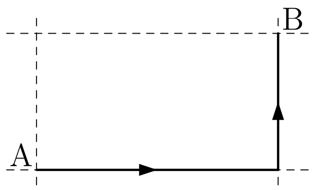
問題作成委員会でこの問題について話し合っていた時に, 高蔵寺高校の村田先生が次のようなコメントをされました.「通勤手当のための通勤距離を申請するとき, 距離が正確にわからないときは, "直線距離を 1.3 倍すればよい" と事務担当者に言われた.」事務担当者の根拠はわかりませんが, 上の平均と比較しても 1.3 倍はかなり的を射たものかもしれません.

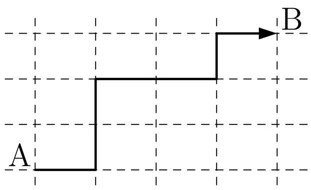
この問題について私が考えた理論値は

$$(*) \qquad \frac{\text{道路距離}}{\text{直線距離}} = \frac{4}{\pi} \qquad (= 1.2732...)$$

です. この説明から始めます. 先ほど述べましたように, 私は自宅から大学まで車を使っています. 距離が比較的長いので, 時々, ルートを変えたり, 横道に入ったりしますが, 意識して遠回りをするようなことをしない限りは走行距離は始め

にカーナビが表示した 26.7 と大きくは変わりません．その理由を考えてみました．

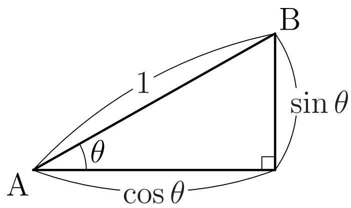




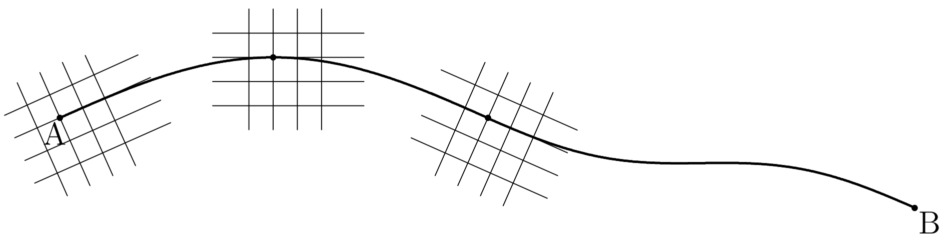
地点 A から地点 B までの道路距離は右図と左図では同じです．都市部には道路がたくさんあり，田舎は道路が少ないでしょうが，このような碁盤の目状に道路がある場合は道路の多少に関係なく

$$\frac{\text{道路距離}}{\text{直線距離}} = \cos\theta + \sin\theta$$

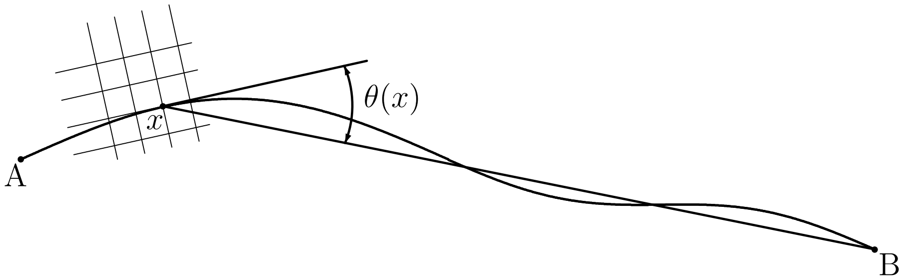
です．ここで，θ は目的地までの方向と道路の方向のなす角度です．対称性から非負とします．遠回りをしないと言うことで $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の条件を付けてもよいと思います．



もちろん，一般には二つの地点を結ぶ道路全体が上記のような碁盤の目ではないでしょう．しかし，局所的には (部分的に見れば) 各地点の道路網は碁盤の目であると考えられます．一般の道路は局所的に碁盤の目状の道路が各地点でいろいろな方向を向いていると考えます．



道路距離は目的地の方向と碁盤の目状の道路の方向とのなす角がどれくらいかで決まります．より少し正確に考えてみます．道路距離を L として途中の地点を x とします．$0 \leq x \leq L$ です．地点 x から目的地までの方向と，地点 x における道路とのなす角を $\theta(x)$ で表すことにします．$0 \leq \theta(x) \leq \frac{\pi}{2}$ です．



$\theta(x)$ の取る割合を表す関数 $f(\theta)$ を次を満たす関数として考えます．任意の $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ について

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)d\theta = \{x \in [0, L];\ \alpha \leq \theta(x) \leq \beta\} \text{ の長さ}$$

このとき

$$(**) \qquad \frac{\text{道路距離}}{\text{直線距離}} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)(\cos\theta + \sin\theta)d\theta}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta}$$

となります．出発点と目的地により $f(\theta)$ は変わりますが，すべての場合の平均ならば，$\theta(x)$ は均一になり，$f(\theta)$ を定数関数と考えることが自然です．

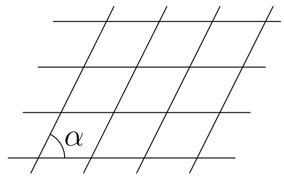
特に, $f \equiv 1$ とすると，上記は

$$(***) \qquad \frac{\text{道路距離}}{\text{直線距離}} = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)d\theta}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta} = \frac{[\sin\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

となり $(*)$ が導かれました．

論文賞としてのこの問題には 4 件の応募がありました．星野泰佑さん (東海中学 2 年) は上記の $(***)$ の計算を正確に行って，理論値 $\frac{4}{\pi}$ を得ていました．中学 2 年で三角関数の積分計算ができることも驚きですが，積分によって平均が表されることを理解していて感心しました．こちらの手の内はすべてお見通しという感じ

で脱帽です．彼は，基礎になる道路網が碁盤の目だけではなく下記のように角度 α の場合も正弦定理使って計算していています．



山口紘生さんと西村慎太郎さん (和歌山県立古佐田丘中学 2 年) は全国 50 箇所のデータをとってその平均を出しています．データをとって調べることは一つの方法として大変よいことですが，データをどのようにとって解析したのかを詳しく書く必要があります．無差別に 50 箇所選んだとありますが，どのような方法で無差別に選んだのか (無差別に選ぶことはそれほど容易ではない)，また道路距離の測定はどのような方法で行ったのか，平均をどのように考えたのか，などの記載がないのが残念です．データが十分に信頼できるものであることを示さないといけません．

それはともかくとして，彼らの結論は 直線距離／道路距離 $= 0.776$ です．逆数にすると

$$\frac{\text{道路距離}}{\text{直線距離}} = \frac{1}{0.776} = 1.289.....$$

です．$(*)$ とかなり近く．$\frac{4}{\pi}$ がデータ的にも裏付けられたと言えるかもしれません．

この問題に関連して名古屋大学の田地先生から以下の研究論文があることを教えて頂きました．私はこの問題が学術的な研究対象になっていることを知って驚きましたが，これらの研究は新しい道路網をどのようにするかなどの都市計画に役立つのかもしれません．

[1] 塚越，小林，道路距離と直線距離，日本都市計画学会学術研究発表会論文集 (1983)，18, pp.43-48

[2] 栗田，円盤都市における道路パターンの理論－直線距離，直交距離並びに放射・環状距離の分布，日本都市計画学会学術研究論文集 （2001），36，pp.859-864.

[3] 田村ほか，日本の主要都市における直線距離と道路距離との比に関する実証的研究，Theory and Applications of GIS (2014), 22 pp.1-7.

上記の論文についての田地先生のコメントです．

● (この分野の) 最初の研究である [1] では，都市内 (東京 23 区) での比は約 1.3, 茨城県の都市間で国道を経由した場合では約 1.21 となることを示しました (その後長い間，この値が基準になっていたようです)．

● [2] は放射環状型 (城下町や，パリ中心部，キャンベラ中心部など) のネットワークに対する理論的な研究で，本文のテーマに即した内容となっています．同じ著者は，碁盤の目のネットワークの理論的結果も取り扱っています．

● [3] は人口 20 万人以上の 112 都市を対象に，GPS データを用いてそれぞれの都市内部での道路距離と直線距離の比を計算したもので，平均値は 1.3035 です．ちなみに，最小は一宮市の 1.1260 であり，最大は静岡市の 1.9235 です．また，この分野のサーベイ的な論文にもなっています．

田地先生も指摘されていますが，地域を限定した実データからの統計的分析ではあまり面白くありません．理論的に，地域を限定しないで平均の値を考察することが今回の論文賞問題のテーマでした．